

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Do políček tabulky 5×5 doplňte čísla od 1 do 5 tak, aby:

- každé z čísel bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou,
- součet deseti čísel v šedě vyznačené části byl 21.

Najděte všechny možnosti.

(J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou.

1		
	2	
		3

- N2. Do následující tabulky doplňte čísla 1, 2, 3 tak, aby každé z nich bylo v každém řádku i v každém sloupci právě jednou a součet čísel v orámované části byl co největší. Určete tento součet.

- N3. Do následující tabulky doplňte čísla od 1 do 9 (každé libovolněkrát) tak, aby se v žádném řádku ani sloupci žádné číslo neopakovalo a aby součet všech čísel v tabulce byl a) co největší; b) co nejmenší.

- D1. Hvězdný čtverec je taková čtvercová tabulka čísel, pro kterou platí, že součty čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou všechny stejné. Na obrázku je pozůstatek hvězdného čtverce, ve kterém byla čísla v jednom řádku a jednom sloupci smazána. Doplňte chybějící čísla tak, aby všechna byla celá a právě čtyři záporná. Určete všechny možnosti.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

Z9–I–2

Pro reálná čísla d, e, s, t a v platí:

$$d \cdot v \cdot e = 2,$$

$$s \cdot e \cdot s \cdot t = 6,$$

$$d \cdot e \cdot v \cdot e \cdot t = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $d \cdot v \cdot e \cdot s \cdot t \cdot e$.

(J. Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c = 14,$$

$$a \cdot c = 20.$$

Určete hodnotu b .

- N2. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b = 3,$$

$$b \cdot c = 6,$$

$$a \cdot c = 9.$$

Určete všechny možné hodnoty součinu $a \cdot b \cdot c$.

- N3. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a \cdot b \cdot c^2 = 12\sqrt{6},$$

$$a^2 \cdot c^2 = 12.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $b \cdot c$?

- D1. Pro reálná čísla a, b, c platí:

$$a^3 \cdot b^4 \cdot c^5 = 2,$$

$$a^6 \cdot b^5 \cdot c^2 = 12,$$

$$a^3 \cdot b^3 \cdot c = 3.$$

Jakých hodnot může nabývat součin $a \cdot b \cdot c$?

Z9–I–3

Jsou dány soustředné kružnice k , l a body A , B , C , D tak, že platí:

- poloměr kružnice k je 10 cm a poloměr kružnice l je větší,
- úsečka AB je tětivou kružnice k a měří 16 cm,
- úsečka CD je tětivou kružnice l , je kolmá k tětivě AB a prochází bodem B ,
- trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Jaká může být délka tětivy CD ? Určete všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

V následujících úlohách opakovaně využíváme Pythagorovu větu.

- N1. Určete poloměr kružnice opsané obdélníku o rozměrech 4 cm $\times$ 6 cm.
- N2. Kružnice k má střed S a poloměr 13 cm. Její tětiva AB je od bodu S vzdálena 5 cm. Vypočítejte délku tětivy AB .
- N3. Jsou dány soustředné kružnice k a l , z nichž l má menší poloměr než k . Tětiva AB kružnice k je od společného středu kružnic vzdálena 1 cm a kružnice l ji rozděluje na tři úseky, každý o délce 4 cm. Určete poloměry kružnic k a l .
- D1. Je dán kosočtverec $ABCD$ a kružnice k se středem A procházející bodem C . Strana kosočtverce měří 10 cm a poloměr kružnice je 12 cm. Kružnice k vytíná na přímce BD tětivu. Určete vzdálenosti bodu B od krajních bodů této tětivy.

Z9–I–4

Ve vstupní hale kina bylo několik jednomístných a několik trojmístných sedaček. Jednou si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 25 lidí a 10 sedaček bylo prázdných. Jindy si uvaděčka všimla, že v hale sedělo 14 lidí a 7 sedaček bylo prázdných. V obou případech byla každá trojmístná sedačka buď prázdná, nebo plně obsazená.

Kolik jednomístných a kolik trojmístných sedaček mohlo být v hale? Najděte všechny možnosti.

(M. Macko)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. K čochce nakyselo dávali v restauraci podle přání zákazníka buď dvě, nebo tři vejce natvrdo.
- a) Kolik nejvýše porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
- b) Kolik nejméně porcí připravili, jestliže spotřebovali právě 20 vajec?
- c) Kolik nejvíce a kolik nejméně vajec je třeba na 20 porcí?
- N2. Máme rozdělit 15 bonbónů na hromádky, z nichž každá má tři, nebo čtyři bonbóny. Kolik takových hromádek bude? Najděte všechny možnosti.
- N3. Děti na táboře získávaly za splnění úlohy body. Ty bylo možné dále směňovat: pět bodů za samolepku, šest bodů za tiskátko. Jára si propočítal, že kdyby chtěl jenom samolepky, zbyl by mu jeden bod nevyužitý. Kdyby si vybral jenom tiskátka, nevyužil by tři body. Nakonec dokázal uplatnit všechny svoje body, přičemž získal dvakrát více tiskátek než samolepek. Kolik nejméně bodů měl Jára před směňováním?
- D1. Na statku žilo 30 lidí. Statkář nařídil, aby mezi ně rozdělili 30 měric obilí tak, že každý muž dostane 3 měrice, každá žena 2 měrice a každé dítě půl měrice obilí. Obilí vystačilo přesně. Kolik mužů, žen a dětí žilo na statku? Najděte všechny možnosti.

Z9–I–5

Na tabuli je napsáno číslo 100. Dva kamarádi hrají hru podle následujících pravidel:

- Hráči se u tabule pravidelně střídají.
- V každém tahu hráč číslo smaže a nahradí číslem novým.
- Nové číslo je z předchozího vytvořeno buď odečtením jedné, nebo vydělením dvěma.
- Všechna napsaná čísla jsou přirozená.
- Vyhrává hráč, který napíše číslo 1.

Ukázalo se, že jeden z hráčů může postupovat tak, aby zaručeně vyhrál. Který hráč to je a kolik nejméně tahů k výhře potřebuje? (I. Jančígová)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. Uvažme hru ze soutěžní úlohy, v níž je na začátku napsáno číslo 8 místo 100. Najděte všechny možné průběhy této hry.
- N2. Jak by probíhala hra ze soutěžní úlohy s nejmenším možným počtem tahů? Kdo by vyhrál?
- N3. Najděte tři nejmenší počáteční čísla hry ze soutěžní úlohy, pro která může druhý hráč postupovat tak, aby zaručeně vyhrál.
- D1. Hra NIM má mnoho variant, uvažujme tuto: Na hromádce je 12 sirek. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. V každém tahu hráč odebere jednu, nebo dvě sirky. Prohrává ten hráč, který odebere poslední sirku. Pokud to je možné, najděte vítěznou strategii pro prvního hráče.

Z9–I–6

Je dán rovnoběžník $ABCD$ a jeho vnitřní bod P s těmito vlastnostmi:

- $|BC| = |CP| = |PD|$,
- $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PCB|$,
- $|\sphericalangle BAP| = 15^\circ$.

Určete velikost úhlu APB . (P. Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

- N1. V rovnoběžníku $ABCD$ je vnitřní úhel u vrcholu A o 30° větší než vnitřní úhel u vrcholu B . Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoběžníku.
- N2. V rovnoramenném trojúhelníku RST se základnou RS značí φ velikost vnitřního úhlu u vrcholu T . Vyjádřete pomocí φ velikosti ostatních vnitřních a všech vnějších úhlů trojúhelníku RST .
- N3. Rozdělte pravidelný pětiúhelník na tři rovnoramenné trojúhelníky a jejich rovnoramennost zdůvodněte.
- D1. V trojúhelníku ABC leží bod D na straně BC , bod E na straně AC a platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|, \quad |BD| = |DE|.$$

Určete velikosti úhlů ACB a BAD .